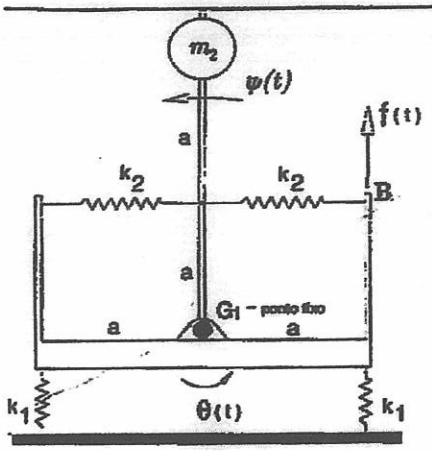


2) (4 val.) O sistema representado na figura é constituído por:

- Corpo 1 - uma estrutura rígida, de massa m_1 e momento de inércia J_{G_1}, ligada ao exterior no ponto G_1 por uma articulação e por duas molas lineares elásticas de igual rigidez k_1. Sobre esta estrutura actua uma força $f(t)$ no ponto B.
- Corpo 2 - uma massa m_2, suportada por uma barra rígida de massa e inércia não considerável, ligada ao exterior pela articulação anterior e ligada ao corpo 1 por duas molas lineares de igual rigidez k_2.

As vibrações do sistema em torno da posição de equilíbrio estático podem ser descritas pelas coordenadas generalizadas $\theta(t)$ e $\psi(t)$.

a) (30%) Estabelecer, literalmente, as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.

Considerando os dados abaixo indicados, determinar:

$$k_1 = 5k \qquad k_2 = 2k \qquad J_{G_1} = 8ma^2 \qquad m_2 = m \qquad a = 0.5\text{m}$$

b) (15%) as frequências e formas naturais de vibração do sistema. Esboçar e comentar as formas naturais de vibração;

c) (15%) as equações do movimento do sistema na base modal;

Tomando para valores de k e m os abaixo indicados, determinar:

$$k = 20000\ \text{N/m} \qquad m = 0.5\ \text{kg}$$

d)(10%) o valor máximo da resposta $\theta(t)$ quando $f(t) = F\,\delta(t)$ (solicitação impulso de valor F aplicada no instante inicial).

e)(10%) a amplitude $\Psi(\omega)$ da resposta $\psi(t)$ da barra quando $f(t) = F\cos\omega t$ com $\omega = 25\,\text{rad/s}$.

f)(20%) Tendo em conta a solicitação da alínea anterior, alterar a distância entre a massa concentrada m_2 e o ponto G_1 de forma a que a amplitude $\Psi(\omega)$ da sua resposta seja reduzida de 5%.

3) (4 val.) Na figura representa-se um modelo simplificado das asas e da fuselagem de uma aeronave. As asas são modelizadas por duas vigas de comprimento ℓ ligadas rigidamente entre si por uma massa concentrada m que representa a fuselagem. As vigas têm uma secção recta de área A e momento de 2ª ordem I, e o material possui módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ. O modelo considerado está livre-livre e possui um modo de corpo rígido (translação) com energia elástica nula e frequência também nula.

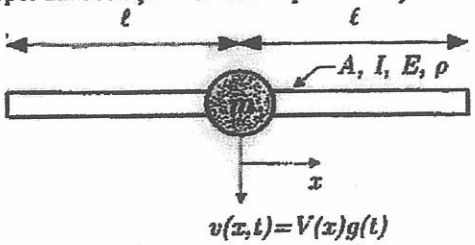
a) (15%) Escrever e classificar as condições de fronteira do sistema.

b) (15%) Discutir, justificando, a aplicabilidade da função $V(x) = \frac{1}{3} - \frac{x^2}{\ell^2}$ como aproximação da primeira forma natural de vibração (com energia elástica não nula) no método da energia de Rayleigh. Esboçar graficamente a função $V(x)$.

c) (30%) Calcular a estimativa da frequência natural de vibração utilizando o quociente de Rayleigh. Exprimir o resultado em função de $\varepsilon = \frac{m}{2\rho A\ell}$.

d) (20%) Indicar os valores exactos da frequência natural para os casos limite: $m \to 0$ e $m \to \infty$.

e) (20%) Discutir a validade da solução fornecida pelo quociente de Rayleigh para os valores limite: $m \to 0$ e $m \to \infty$. Se necessário, propor uma solução alternativa para a função de aproximação $V(x)$.



Exame de Recurso – 2007 - 07 - 12

Parte Prática

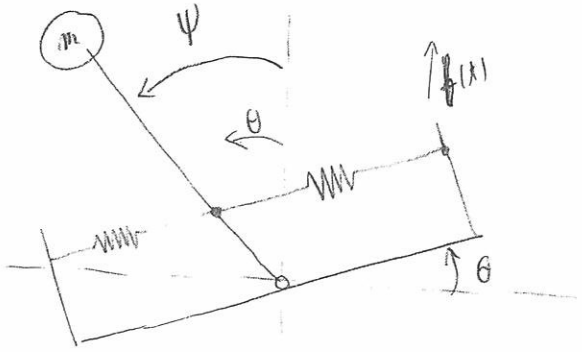
2. a) Admitindo deslocamentos pequenos, tal que $\begin{cases} \sin\theta \approx \theta \ \text{e} \ \cos\theta \approx 1 \\ \sin\psi \approx \psi \ \text{e} \ \cos\psi \approx 1 \end{cases}$

$$T = \frac{1}{2} J_{G_1} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{d}{dt} \left(2a \underbrace{\sin\psi(t)}_{\approx \psi} \right) \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} J_{G_1} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} 2a\, m_2\, \dot{\psi}^2$$

$$V = \left[\frac{1}{2} K_1 \left(a \underbrace{\sin\theta(t)}_{\approx \theta(t)} \right)^2 \right] \times 2 + \frac{1}{2} K_2 \left(a \underbrace{\sin\left(\psi(t) - \theta(t)\right)}_{\approx \psi(t) - \theta(t)} \right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{2} \cdot 2a^2 K_1 \theta^2(t) + \frac{1}{2} a^2 K_2 \left(\psi(t) - \theta(t)\right)^2$$



Forças não conservativas:

$$Q_1 = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(f(t) \cdot a \underbrace{\sin\theta}_{\approx \theta} \right) = a \cdot f(t)$$

$$Q_2 = \frac{\partial}{\partial \psi} \left(f(t)\, a \underbrace{\sin\theta}_{\approx \theta} \right) = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = J_{G_1}\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = J_{G_1}\ddot{\theta}(t)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = 2a^2 K_1 \theta(t) - a^2 K_2 \left(\psi(t) - \theta(t)\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = 2a\, m_2 \dot{\psi} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right) = 2a\, m_2 \ddot{\psi}(t)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial \psi} = a^2 K_2 \left(\psi(t) - \theta(t)\right)$$

Logo:

$$\begin{cases} J_{G_1}\ddot{\theta}(t) + \left(2a^2 K_1 + a^2 K_2\right)\theta(t) - a^2 K_2 \psi(t) = a^2 f(t) \\ 2a\, m_2 \ddot{\psi}(t) - a^2 K_2 \theta(t) + a^2 K_2 \psi(t) = 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 8ma^2 & 0 \\ 0 & 2a\,m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{\psi}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 12a^2 K & -2a^2 K \\ -2a^2 K & 2a^2 K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(t) \\ \psi(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a^2 f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Fazendo $\begin{Bmatrix} \theta(t) \\ \psi(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \cos(\omega t - \phi)$ e considerando regime livre

$$\begin{bmatrix} 12a^2 K - 8ma^2\omega^2 & -2a^2 K \\ -2a^2 K & 2a^2 K - 2a\,m\,\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Calculando o det. característico:

$$\begin{vmatrix} 12a^2K - 8ma^2\omega^2 & -2a^2K \\ -2a^2K & 2a^2K - 2am\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{a=0,5} \omega_1 \cong 0{,}6226\sqrt{\frac{K}{m}} \quad \text{V}$$

V $\omega_2 \cong 1{,}2698\sqrt{\frac{K}{m}}$

1ª Forma Natural:

$$(12\times 0{,}5^2 K - 8\cdot m\cdot 0{,}5^2\cdot\left(0{,}6226\sqrt{\frac{K}{m}}\right)^2)\,\mu_1 - 2\times 0{,}5^2\times K\,\mu_2 = 0 \iff$$

$$\iff \mu_1 \cong 0{,}2247\,\mu_2$$

$$\{\mu\}_1 = \begin{Bmatrix} 0{,}2247 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

2ª Forma Natural:

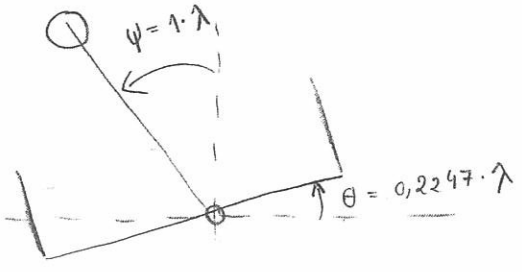
$$(12\times 0{,}5^2 K - 8m\,0{,}5^2\left(1{,}2698\sqrt{\frac{K}{m}}\right)^2)\,\mu_1 - 2\times 0{,}5^2\times K\,\mu_2 = 0 \iff$$

$$\iff \mu_1 \cong -2{,}2244\,\mu_2$$

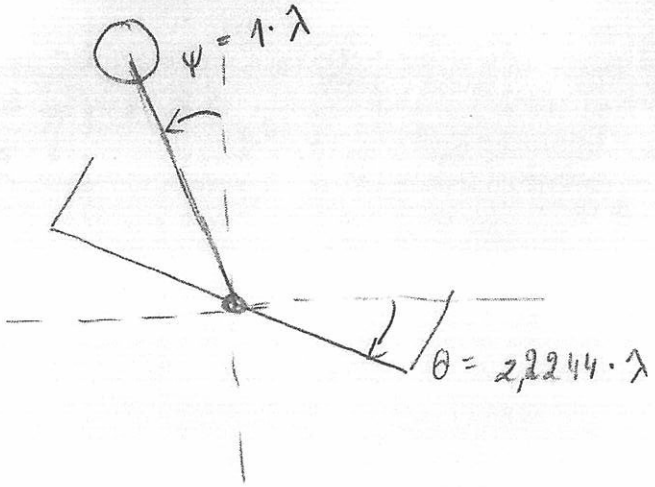
$$\{\mu\}_2 = \begin{Bmatrix} -2{,}2244 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Esboço:

1ª Forma Natural:



2ª Forma Natural:



Comentário: No 1º modo o movimento é em fase mas no 2º o movimento é em oposição de fase.

c) Normalização.

$$\{\phi\}_i = \frac{1}{\sqrt{\{u\}_i^T [m] \{u\}_i}} \{u\}_i$$

$$\{\phi\}_1 = \frac{1}{\sqrt{0,5505}} \begin{Bmatrix} 0,2247 \\ 1 \end{Bmatrix} \simeq \begin{Bmatrix} 0,3029 \\ 1,3478 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 = \frac{1}{\sqrt{5,4480}} \begin{Bmatrix} -2,2244 \\ 1 \end{Bmatrix} \simeq \begin{Bmatrix} -0,9530 \\ 0,4284 \end{Bmatrix}$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0,3029 & -0,9530 \\ 1,3478 & 0,4284 \end{bmatrix}$$

$$[I]\{\ddot{\eta}(t)\} + [\Omega^2]\{\eta(t)\} = [\Phi]^T\{f(t)\} \Rightarrow$$

Já substituindo $K = 20000\ N/m$ e $m = 0{,}5\ Kg$:

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + 124{,}52^2\,\eta_1(t) = 0{,}3029 \times a^2 f(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) + 253{,}96^2\,\eta_2(t) = -0{,}9530 \cdot a^2 f(t) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + 124{,}52^2\,\eta_1(t) = 0{,}075725\, f(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) + 253{,}96^2\,\eta_2(t) = -0{,}23825\, f(t) \end{cases}$$

d) Como o impulso é aplicado em $t = 0$:

$$\eta_1(t) = 0{,}075725\, F \cdot \frac{1}{\underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{m_{eq}}\ \underset{\substack{\shortparallel \\ 124{,}52}}{\omega_1}}\, e^0 \operatorname{sen} \omega_1 t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta_1(t) = 6{,}081 \times 10^{-4}\, F \operatorname{sen} 124{,}52 t$$

$$\eta_2(t) = -0{,}23825\, F \cdot \frac{1}{253{,}96} \operatorname{sen} 253{,}96 = -9{,}381 \times 10^{-4}\, F \operatorname{sen} 253{,}96 t$$

Então, como $\{x(t)\} = [\Phi]\{\eta(t)\}$

$$\theta(t) = 0{,}3029\, \eta_1(t) - 0{,}9530\, \eta_2(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta(t) = 1{,}842 \times 10^{-4}\, F \operatorname{sen} 124{,}52 t + 8{,}940 \times 10^{-4}\, F \operatorname{sen} 253{,}96 t$$

Então o que podemos afirmar:

$$\theta(t)_{max} \leq 1{,}842 \times 10^{-4} F + 8{,}940 \times 10^{-4} F \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta(t)_{max} \leq 1{,}078 \times 10^{-3} \cdot F}$$

e) Pela alínea b):

$$\begin{bmatrix} 12a^2K - 8ma^2\omega^2 & -2a^2K \\ -2a^2K & 2a^2K - 2am\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(\omega) \\ \Psi(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Indo à pág. 186:

$$(9.19) \rightarrow \Psi(\omega) = \frac{0 - (-2a^2K)F}{(12a^2K - 8ma^2\omega^2)(2a^2K - 2am\omega^2) - (-2a^2K)^2}$$

Para: $a = 0{,}5\ m$; $K = 20000\ N/m$; $m = 0{,}5\ kg$; $\omega = 25\ rad/s$

$$\Psi(\omega) \cong 2{,}104 \times 10^{-5} F$$

f) Reparar que apenas a altura da haste varia (não muda a largura do corpo 1). Também parece claro que a altura de acção das molas K_2 também não muda, pelo que considerarei que apenas a distância "a" das molas até à massa muda.

Assim, na alínea a) o único termo que muda no formalismo de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right) = (a+b)\, m_2\, \ddot{\psi}(t)$$

Ficando

$$\begin{bmatrix} 12a^2K - 8ma^2\omega^2 & -2a^2K \\ -2a^2K & 2a^2K - (a+b)m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Theta(\omega) \\ \psi(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Logo:

$(2{,}104\times10^{-5}\,F)\cdot 0{,}95$

$$\psi(\omega) = \frac{-(-2a^2K)\,F}{(12a^2K - 8ma^2\omega^2)(2a^2K - (a+b)m\omega^2) - (-2a^2K)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = -0{,}8479 \text{ m}$$

Não dava para mudar só aquele troço da haste.

Devia considerar-se que as molas K_2 continuavam a meio da haste mas agora a uma distância b do G_1, e refazer a alínea a).

VD

3. a)

$$EI \left.\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=-l} = 0 \Rightarrow \left.\frac{d^2 V(x)}{dx^2}\right|_{x=-l} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EI \left.\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=-l}\right) = 0 \Leftrightarrow \left.\frac{d^3 V(x)}{dx^3}\right|_{x=-l} = 0 \quad (2)$$

$$EI \left.\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=l} = 0 \Rightarrow \left.\frac{d^2 V(x)}{dx^2}\right|_{x=l} = 0 \quad (3)$$

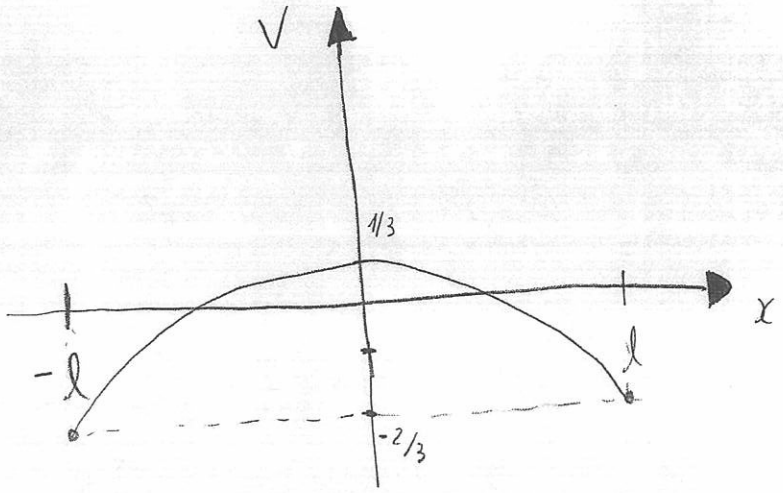
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EI \left.\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=l}\right) = 0 \Rightarrow \left.\frac{d^3 V(x)}{dx^3}\right|_{x=l} = 0 \quad (4)$$

Todas as condições fronteira são naturais

b) Tem de ser derivável 2 vezes (pelo menos); uma vez que o problema de vibração de uma viga à flexão é de 4ª ordem na variável espacial:

$$\frac{dV(x)}{dx} = -\frac{2x}{l^2} \quad ; \quad \frac{d^2 V(x)}{dx} = -\frac{2}{l^2}$$

Tem de verificar as condições fronteira geométricas, que como neste caso não existem, não é necessário fazer mais nenhuma verificação. A função é admissível.



c)

$$V_{max} = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l} EI\left(\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right)^2 dx + \underbrace{V_{efm}}_{=0} =$$

$$= \frac{EI}{2}\int_{-l}^{l}\left(-\frac{2}{l^2}\right)^2 dx = \frac{EI}{2}\cdot\frac{4}{l^4}\cdot\left(l-(-l)\right) =$$

$$= \frac{EI}{2}\cdot\frac{8l}{l^4}$$

$$T_{max} = \omega^2\left(\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\rho A\left(V(x)\right)^2 dx + \frac{1}{2}m\left(V(x)\big|_{x=0}\right)^2\right) =$$

$$= \omega^2\left(\frac{\rho A}{2}\int_{-l}^{l}\left(\frac{1}{3}-\frac{x^2}{l^2}\right)^2 dx + \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{3}\right)^2\right) =$$

$$= \omega^2\left(\frac{\rho A}{2}\left(\frac{4l}{45}-\left(-\frac{4l}{45}\right)\right) + \frac{1}{2}\frac{m}{9}\right) =$$

$$= \omega^2\left(\frac{\rho A}{2}\cdot\frac{8l}{45} + \frac{1}{2}\cdot\frac{m}{9}\right)$$

$$R(V(x)) = \omega^2 = \frac{\frac{EI}{2} \cdot \frac{8l}{l^4}}{\frac{\rho A}{2}\frac{8l}{45} + \frac{1}{2}\cdot\frac{m}{9}} =$$

$$= \frac{EI}{\rho A l^4} \frac{1}{\frac{1}{45} + \frac{m}{72\rho A l}} = \frac{EI}{\rho A l^4} \cdot \frac{45}{1 + \frac{5}{4}\cdot\frac{m}{2\rho A l}} \Rightarrow$$

$$\frac{m}{2\rho A l} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \omega^{ar} = \sqrt{\frac{45}{1+\frac{5}{4}\varepsilon}} \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

d) $m \to 0$: Viga livre - livre :

Pág. 359 $\rightarrow$ $\beta_2 l_{total} = 4{,}7300 \Rightarrow \omega^{ar} = (4{,}7300)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4_{total}}} =$

$$= 22{,}3729 \sqrt{\frac{EI}{\rho A (2l)^4}} = \frac{22{,}3729}{2^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \cong 5{,}5932\sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

$m \to \infty$:

$$EI \left.\frac{d^3 V(x)}{dx^3}\right|_{x=0} = \frac{1}{2} m \left(V(x)|_{x=0}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\left.\frac{d^3 V(x)}{dx^3}\right|_{x=0} \longrightarrow \infty$$

A viga não consegue mover a massa porque esta tem

uma inércia muito grande! Equivale a um apoio simples. Logo:

$$V(x)\Big|_{x=0} = 0$$

Portanto há um modo para $x=0$ fazendo com que a viga vibre segundo o 2º modo de vibração (considerando o 1º como sendo o modo com frequência não nula).

$$\beta_3 l_{total} = 7,8532 \Rightarrow w^{ix} = 7,8532^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A (\alpha l)^4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w^{ix} = 15,4182 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

e) Para $m \to 0$ as condições fronteira não se alteram. No entanto quando $m \to \infty$ a viga passa a ter um modo para $x=0$ pelo que a função $V(x)$ deixa de ser admissível. Para este caso uma função possível poderia ser:

$$V(x) = \frac{x^2}{l^2}$$

Embora não seja a melhor aproximação.